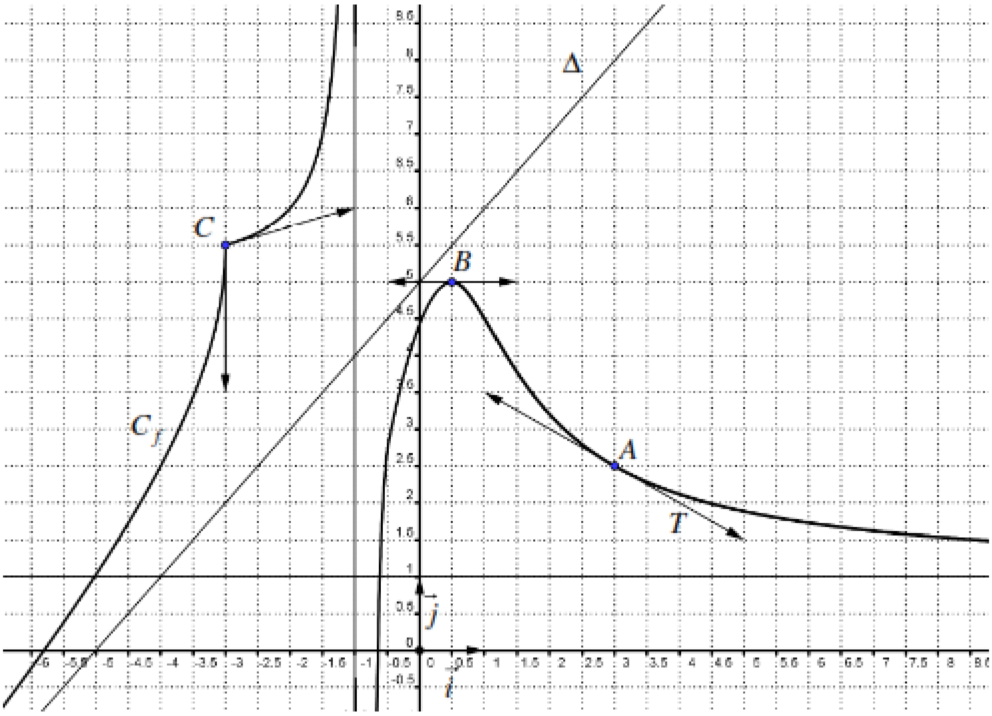
Exercice 1 : (6points)

Ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f telle que :

- Δ une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$
- $y = 1$ une asymptote au voisinage de $+\infty$
- $x = -1$ asymptote verticale
- Les flèches représentent des tangentes et des demi-tangentes



1. Ecrire l'ensemble de définition de f et les intervalles sur lesquels elle est continue.
2. Ecrire l'équation de Δ
3. Utiliser le graphique pour calculer les limites suivantes :
   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$
   b. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-2x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1-f(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty^+} \dfrac{f(x)-5{,}5}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-4}{f(x)-5}$
4. Donner les valeurs suivantes : $f(3)$; $f'(3)$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; $f'_d(-3)$ et écrire une valeur approchée de $f(3{,}001)$
5. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-5{,}5}{3+x}$; $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$
6. Dresser le tableau de variation de f et préciser ses extrémums locaux

Exercice 2 : (6points)

I/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a $f'(x) = \frac{(x^2-2x-3)}{(x-1)^2}$

2) a) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $(O, \vec{\imath})$.

b) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $\Delta: y = -3x + 1$

II/ Soit la fonction , définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \ \ x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & si \ \ x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 0.

2) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Justifier que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

et calculer $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

b) Déterminer le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de g ,.

4) Déterminer les extrémums de g et préciser leurs natures.

Exercice 3 :(6points)

Soit $f(x) = 2cos2x + 7sinx - 5$ où $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

1. Vérifier que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0$, où $y = sinx$
2. Montrer que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow sinx = \frac{1}{2}$
3. Résoudre dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice 4 : (5points)

Les parties I/ et II/ sont totalement indépendentes

I/ 1. Montrer que : $2cos2x.cos4x - cosx - cos3x = 2cos2x(cos4x - cosx)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$ l'équation : $2cos2x.cos4x = cosx + cos3x$

II/ Soit $x \in R$. Posons $\Phi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x . cos^2 x$

1 . Montrer que $\Phi(x)$ est un réel constant.

2. Vérifier que $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x . cos^2 x = \frac{3}{16}$

Posons $\alpha = \sin^2 x$ et $\beta = \cos^2 x$

3. Montrer que α et β solutions de l'´equation $y^2 - y + \frac{3}{16} = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$